# Optimizarea portofoliilor de acțiuni. Abordări clasice și de natură genetică

## Randamentul / riscul unui portofoliu. Definirea problemelor de optimizare

În cele ce urmează este prezentat calculul randamentului aşteptat, respectiv al riscului asociat unui portofoliu de acţiuni. (Bartholomeu-Biggs, 2005)

Considerăm disponibil istoricul randamentelor procentuale pe *m* perioade de timp pentru fiecare acţiune dintr-un grup de *n* acţiuni şi notăm cu

* , randamentul acţiunii *i* în perioada *j*;
* , fracţiunea investită în acţiunea *i*, astfel încât
* , varianţa acţiunii *i*;
* , covarianţa dintre acţiunile *i* şi *k*.

Portofoliul este definit de fracţiunile de investiţii .

Randamentul mediu al fiecărei acţiuni , notat cu , este calculat prin

*Randamentul aşteptat al portofoliului* este dat prin

Varianţa fiecărei acţiuni , respectiv covarianţa dintre oricare două acţiuni , sunt calculate prin

Varianţa portofoliului este definită prin

şi este utilizată ca *măsură a riscului portofoliului*.

Funcţiile randament, respectiv risc, definite prin relaţiile (4.2), respectiv (4.5) sunt reprezentate matriceal prin

unde

De asemenea, în reprezentare matriceală relaţia

devine

unde este vectorul unitar *n*-dimensional.

Problema primară de minimizare a riscului, RISCMIN0, este formulată prin (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISCMIN0:

Minimizează

cu restricţia

**Observaţie**. RISCMIN0 poate fi modificată prin eliminarea restricţiei şi a variabilei :

În multe situaţii practice, investitorul este interesat atât în minimizarea riscului, cât şi în optimizarea randamentului portofoliului ales. *În general, un portofoliu este considerat optim dacă el furnizează cel mai mare randament cu cel mai mic risc.*

O modalitate de a determina un astfel de portofoliu este prin considerarea funcţiei de tip compozit

unde constanta pozitivă controlează raportul dintre randament şi risc. Cu aceste modificari se obţine problema de optimizare RISC-RANDAMENT1, (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISC-RANDAMENT1:

Minimizează

cu restricţia

**Observaţie**. RISC-RANDAMENT1 poate fi modificată prin eliminarea restricţiei şi a variabilei .

O variantă alternativă pentru a determina portofoliul optim este de a fixa o valoare ţintă pentru randament, de exemplu de *Rp* procente, şi de a considera problema de optimizare RISCMIN1, (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISCMIN1:

Minimizează

cu restricţiile

sau, alternativ, problema modificată RISCMIN1M:

RISCMIN1M:

Minimizează

cu restricţia

Constanta pozitivă semnifică raportul dintre randament şi risc.

O problemă des întâlnită în practică este aceea în care este selectat un nivel acceptabil de risc, , şi este maximizat randamentul aşteptat. Modelul matematic revine la problema de minimizare cu constrângeri RANDAMENTMAX1:

RANDAMENTMAX1:

Minimizează

cu restricţiile

sau, alternativ, problema modificată RANDAMENTMAX1M, (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RANDAMENTMAX1M:

Minimizează

cu restricţia

Constanta pozitivă semnifică relaţia existentă între randamentul şi riscul portofoliului.

**Observaţie**. RISCMIN1M şi respectiv RANDAMENTMAX1M pot fi modificate prin eliminarea restricţiei şi a variabilei .

## Optimizarea portofoliilor cu *n* acțiuni

**Definirea problemelor de optimizarea portofoliilor cu *n* acţiuni în termenii problemelor de optimizare fără constrângeri**

Prin utilizarea relaţiei (4.8), variabila este poate fi eliminată:

şi funcţiile randament şi risc sunt exprimate exclusiv în termenii . În plus, restricţia (4.8) poate fi eliminată din problemele de optim în care apare.

Fie , vector de dimensiune *n*-1, vector *n*-dimensional, cu unicul element nenul şi *B* matrice de dimensiune , cu primele linii liniile corespunzătoare matricei unitate şi ultima linie formată cu elementul -1,

.

Cu aceste notaţii, obţinem

Similar celor prezentate în §4.1, procedura MINRISC0 defineşte problema primară de minimizare a riscului în cazul unui portofoliu definit de fracţiunile de investiţii . Prin utilizarea relaţiei (4.13), rezultă (Bartholomeu-Biggs, 2005):

MINRISC0: (4.14)

Minimizează

Relaţia (4.14) defineşte o problemă de optimizare fără constrângeri, în *n*-1 variabile. Dacă este o soluţie a problemei (4.14), atunci portofoliul de risc minim, notat , este definit prin

O serie de metode care rezolvă problema minimizării unei funcţii de mai multe variabile utilizează vectorul derivatelor parţiale de ordinul I, numit *gradient*. Dacă *V* este funcţie de *m* variabile, atunci gradientul lui *V*, notat sau , este definit prin

Gradientul funcţiei obiectiv din relaţia (4.14) este

 (4.16)

Pentru rezolvarea problemelor de optim, unele metode necesită şi calculul derivatelor parţiale de ordinul II, adică a matricei Hessian. Dacă *V* este funcţie de *m* variabile, atunci matricea Hessian, notată sau , este definită prin



Hessianul funcţiei obiectiv din relaţia (4.14) este

 (4.17)

Problema RISCMIN1M, definită în în §4.1, poate fi exprimată în termenii unei probleme de optimizare fără restricţii prin utilizarea relaţiei (4.13), astfel (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISCMIN1M (4.18)

Minimizează

Pentru calculul vectorului gradient şi al matricei Hessian pentru funcţia F definită în (4.18), considerăm reprezentarea

unde

şi

Sunt obţinute relaţiile

unde

şi

Similar, este obţinută matricea Hessian, prin



unde



şi

 este o matrice cu rangul 1, pentru orice *i*,*j*, ,



Problema RANDAMENTMAX1 este reformulată în termenii RANDAMENTMAX1M (vezi în §4.1) şi, prin utilizarea relaţiei (4.13) rezultă problema de optimizare fără restricţii (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RANDAMENTMAX1M (4.19)

Minimizează

Expresiile care definesc gradientul şi Hessianul funcţiei definite în (4.19) sunt obţinute prin reprezentarea



unde

,  şi .

Rezultă





unde  este matrice de rangul I; pentru orice *i*,*j*, ,

.

**Observaţii**

1. În cadrul problemelor enunţate în această secţiune, nu este impusă condiţia ca fiecare să fie pozitiv. O valoare negativă a unei fracţiuni de investiţii are semnificaţia următoare: strategia optimă de investiţie implică vânzarea de tip “short selling”, adică vânzarea unor active pe care investitorul nu le deţine, prin împrumutul acestora de la broker cu intenţia de a le returna ulterior. Această strategie este efectivă doar în situaţia în care preţul acţiunilor este în scădere, deoarece achiziţionarea lor la un moment de timp ulterior investiţiei curente implică un cost mai mic decât preţul obţinut prin vânzarea activelor împrumutate la momentul efectuării investiţiei curente.
2. În general, soluţia unei probleme de risc minim nu implică situaţia de tip “short selling” dacă randamentul dorit este ales corespunzător, adică în conformitate cu randamentele medii calculate pentru activele care vor fi incluse în portofoliu.

## Metode clasice de optimizare a funcțiilor de *n* variabile

**Condiţii de optimalitate**

Fie  funcţie de variabile, continuă şi diferenţiabilă. Caracterizarea punctului de minim atins de F este realizată în termenii vectorului gradient şi a matricei Hessian , notat în continuare cu **g** sau cu , respectiv , matrice notată în continuare cu **G** sau 

**Observaţie**. În cazul în care *F* este dublu diferenţiabilă, matricea Hessian G este simetrică.

**Definiţia 4.1**. Matricea simetrică **A** este pozitiv definită dacă şi numai dacă, pentru orice , are loc relaţia .

**Definiţia 4.2**.Fie  funcţie de *n* variabile şi cu proprietăţile (4.20)  şi  este pozitiv definită. Atunci este punct de minim local al lui *F*.

Dacă o funcţie *F* are mai multe minime locale (puncte ce îndeplinesc (4.20)), atunci minimul global este acel minim local pentru care este obţinută cea mai mică valoare a lui *F*.

**Observaţie**. Problema RISCMIN0 poate fi rezolvată prin abordare analitică. Deoarece funcţia gradient este

,

valoarea optimală a lui **x** este obţinută prin rezolvarea sistemului linia



**Metode directe de căutare a optimului**

În general, în problemele de optimizare a portofoliilor, vectorul gradient şi matricea Hessian pot fi în general calculate, funcţiile obiectiv fiind în general dublu diferenţiabile. Pentru situaţiile de acest gen sunt folosite *metode de tip gradient*. În cazul în care optimizarea nu poate fi realizată prin utilizarea relaţiilor (4.20), o variantă de rezolvare a problemelor de optimizare o constituie *metodele de căutare directă*, bazate exclusiv pe analizarea valorile funcţiei obiectiv.

Căutarea directă a valorii minime a unei funcţii obiectiv *F* este realizată prin evaluarea lui *F* în punctele unei „reţele” de valori posibile ale vectorului variabilă a funcţiei. Deşi metodele de acest tip nu sunt în general eficiente, există situaţii în care valoarea minimă poate fi aproximată prin considerarea unei variante a lui *F* discretizată pe un set de puncte „aleatoare” şi utilizarea unor argumente de natură statistică pentru estimarea probabilităţii de determinare a minimului într-un anumit număr de încercări.

**Căutarea univariantă**

Metoda implică utilizarea unei metode directe de căutare (ca, de exemplu, metoda bisecţiei) pentru generarea unei secvenţe de tip minimizarea unidimensională a lui *F* astfel încât, la fiecare etapă i, , F este minimizat în raport cu . Cu alte cuvinte, punctul optim este căutat de-a lungul direcţiilor date de fiecare coordonată pe rând. Deşi uneori metoda funcţionează eficient, ea nu poate fi general aplicabilă deoarece nu este convergentă.

**Metoda Hooke şi Jeeves**

Tehnica Hooke&Jeeves utilizează metoda căutării pe o singura axă pe baza următorului raţionament. Dacă  sunt estimări ale punctelor de minim ale lui la momentul iniţial, respectiv la momentul final al ciclului de căutare, atunci minimizarea unidimensională a lui *F* este realizată pe direcţia  printr-o estimare de tipul

 (4.21),

unde este o constantă scalară. Metoda continuă prin efectuarea ciclurilor de căutare univariantă urmate de estimări de forma (4.21).

**Metode de aproximare a derivatelor**

Una dintre cele mai uzuale metode de minimizarea a lui  exclusiv pe baza valorilor funcţiei *F* este prin adaptarea metodelor de tip gradient la estimările de tip diferenţă finită ale derivatelor funcţiei. De exemplu, pentru derivatele de ordinul I poate fi utilizată estimarea diferenţă centrată



Abordările care implică estimarea derivatelor funcţiei obiectiv sunt dezvoltate pe baza presupunerii că *F* este diferenţiabilă. În plus, metodele din această clasă nu sunt în general aplicate problemelor pentru care derivatele funcţiei *F* nu sunt funcţii continue.

**Metode de tip gradient**

Aşa cum a fost menţionat, în problemele de optimizare a portofoliilor funcţiile obiectiv sunt dublu diferenţiabile şi relaţiile (4.20) pot fi verificate. Optimizarea funcţiilor în *n* variabile şi care îndeplinesc proprietăţile din definiţia 4.2 poate fi realizată prin metode de tip gradient, respectiv de tip Newton. Sunt prezentate în continuare metoda celei mai rapide (abrupte) descreşteri şi metoda Newton. Ambele metode presupun construcţia câte unui şir care, în anumite condiţii de regularitate impuse funcţiei obiectiv, converge către soluţia optimală a problemei de optimizare.

**Metoda celei mai rapide descreşteri**

Tehnica celei mai rapide descreşteri este justificată geometric astfel. Presupunem că este funcţia de minimizat şi este punctul construit la momentul curent. Un punct „mai bun” (în sensul că valoare funcţiei obiectiv descreşte în acel punct faţă de punctul curent) poate fi determinat prin deplasarea pe direcţia de căutare care determină descreşterea cea mai rapidă a lui *F*, *adică pe direcţia gradientului negativ*.

Metoda celei mai rapide descreşteri de tip „perfect line search” este descrisă astfel (Bartholomeu-Biggs, 2005):

* Selectează , estimare iniţiale a punctului de minim al lui şi
* Repetă pentru
* calculează care minimizează
* aplică regula de actualizare
* Până când

**Observaţie**. O serie de metode de optimizare utilizează în construcţia şirului tipare similare celui prezentat în algoritmul de mai sus; fiecare iteraţie constă în două etape: alegerea direcţiei de căutare (calculul lui ) şi respectiv procedura de determinare a demarcaţiei (line search) în scopul stabilirii unei valori adecvate a pasului .

**Definiţia 4.3**. Procedura de determinare a demarcaţiei care minimizează  se numeşte *perfectă* sau *exactă*.

**Definiţia 4.4**. O procedură de determinare a demarcaţiei prin care este acceptată orice valoare a pasului *s* care îndeplineşte  şi este mărginită se numeşte *inexactă* sau *slabă*.

În continuare este prezentată teorema de convergenţă a metodei.

**Propoziţia 4.1**. Fie  o funcţie dublu diferenţiabilă, cu derivatele continue şi mărginită inferior şi pentru care este îndeplinită proprietatea



pentru orice vector , unde  este constantă scalară. Atunci şirul definit prin

 ()

are proprietatea

când .

**Metoda Newton**

Tehnica celei mai abrupte descreşteri are inconvenientul că nu foloseşte informaţia dată de cea de-a doua derivată. Pot fi obţinute metode mai eficiente pe baza proprietăţii funcţiilor pătratice, , de a avea matricea Hessian constantă. Fie

 (4.22).

Gradientul este

.

Punctul staţionar rezultă prin rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare

 (4.23).

Soluţia sistemului (4.23) este punct de minim dacă matricea Hessian, **A**, este pozitiv definită. Dacă **A** este negativ definită, soluţia sistemului (4.23) este punct de maxim. Dacă **A** este oarecare, soluţia lui (4.23) este punct şa. Dacă **A** este nesingulară, atunci (4.22) are un unic punct staţionar.

Principiile expuse mai sus pot fi aplicate pentru minimizarea unei funcţii generale, . Fie estimaţia punctului de minim al lui *F* la momentul curent şi , . Utilizând dezvoltarea Taylor în jurul lui obţinem

 (4.24)

şi

 (4.25)

Rezultă că, dacă  este pozitiv definită,

 (4.26)

Este obţinut astfel următorul algoritm:

* selectează , estimare iniţiale a punctului de minim al lui  şi 
* repetă pentru 
* , 
* dacă este pozitiv definită, atunci calculează 
* altfel 
* calculează astfel încât îndeplineşte condiţiile Wolfe 2 şi 3 (Bartholomeu-Biggs, 2005)
* aplică regula de actualizare
* Până când 

**Observaţie.** În cazul problemei RISCMIN1M, matricea Hessian corespunzătoare funcţiei obiectiv este

deci este matrice constantă (nu depinde de *x*). *G* este pozitiv definită şi simetrică. Constanta *M* din propoziţia 4.1 (convergenţa metodei celei mai rapide descreşteri) poate fi setată astfel.

Deoarece *G* este pozitiv definită şi simetrică, rezultă că este diagonalizabilă şi există matrice cu coloane un set de vectori proprii ortogonali, corespunzători valorilor proprii ale matricei G astfel încât

Rezultă că problema revine la calculul constantei *M* astfel încât

Pentru .

În continuare obţinem

Deoarece dacă

Rezultă că

şi M poate fi setat pe valoarea (valoarea proprie dominantă a matricei constante *G*)

*Exemplul 1*

În tabelul 4.1 este prezentat istoricul randamentelor corespunzătoare acţiunilor A1, A2, A3, A4, A5 pe o perioadă de 10 săptămâni. (Bartholomeu-Biggs, 2005)

Tabel 4.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***S1*** | ***S2*** | ***S3*** | ***S4*** | ***S5*** | ***S6*** | ***S7*** | ***S8*** | ***S9*** | *S10* |
| ***A1*** | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.1 | 1.2 | 1.1 | 1.0 | 1.0 | 1.1 |
| ***A2*** | 1.3 | 1.0 | 0.8 | 0.9 | 1.4 | 1.3 | 1.2 | 1.1 | 1.2 | 1.1 |
| ***A3*** | 0.9 | 1.1 | 1.0 | 1.1 | 1.1 | 1.3 | 1.2 | 1.1 | 1.0 | 1.1 |
| ***A4*** | 1.1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.2 | 1.2 | 1.1 | 1.0 | 1.1 | 1.2 |
| *A5* | 0.8 | 0.75 | 0.65 | 0.75 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.1 | 1.2 |

Problema de rezolvat: determinarea portofoliului de risc minim pentru un randament dat .

Randamentul mediu al portofoliului rezultă

şi matricea de covarianţă este

Problema este modelată în termenii RISCMIN1M astfel:

Minimizează

Prin aplicarea metodelor de tip gradient, respectiv Newton prezentate, pentru eroarea permisă , rezultă

* portofoliul
* riscul minim
* randamentul , randamentul dat.